

最优切割次序模型

摘要 本文研究了截断切割的最优切割次序模型。利用简单的伸缩变换,我们将 $r \neq 1$ 的情况统一到 $r = 1$ 的情况;我们讨论了切割方式的一些性质,如描述互换相邻切割对费用的影响的交换引理,同时在此基础上经严格证明给出了 $e = 0$ 时的一种十分简明的优化准则:每次选择切去长度最长的切割;在 $e > 0$ 的情况下,利用我们给出的引理及准则,我们将需考虑的不同切割方式数由最初的 90 种减少到不到 20 种。我们讨论了所建立模型的优缺点,同时也对另一种“加工费用最少者优先”的准则作了简单评估。在本文的附录中,通过引进切割的“贡献”这一概念,我们给出了交换引理的另一种证明。

一、问题重述

某些工业部门(如贵重石材加工等)采用截断切割的加工方式,这里“截断切割”是指将物体沿某个切割平面分成两部分。从一个待加工长方体中加工出一个尺寸已知、位置预定的成品长方体(这两个长方体的对应表面是平行的),通常要经过 6 次截断切割。切割费用与切割的面积成正比,且水平切割单位面积的费用是垂直切割单位面积费用的 r 倍;当先后两次垂直切割的切割平面(不管它们之间是否穿插水平切割)不平行时,因调整刀具还需费用 e 。由工艺要求,与水平工作台接触的长方体底面是事先指定的。

要求设计一种方法,在给定了待加工长方体的尺寸及成品长方体的尺寸、位置,及单位面积切割费用与刀具调整的费用后,能够给出一种使加工费用最少的切割方式(即各面的加工次序)。

二、问题分析

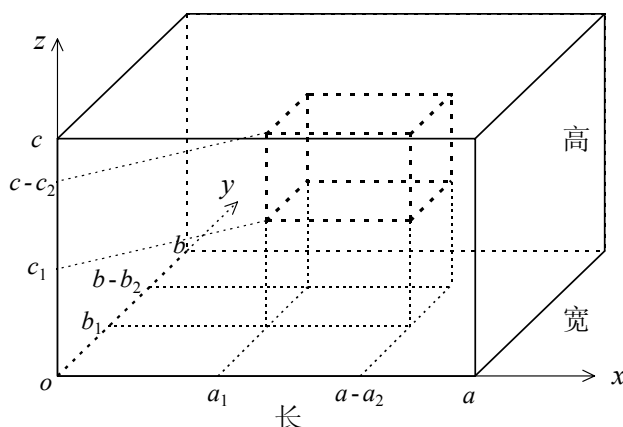


图1 待加工长方体与成品长方体

如图 1 建立直角坐标系, o 为坐标原点。所谓用截断切割的方法从待加工长方体中加工出一个成品长方体,就是以后者的 6 个面为切割平面各切一刀,使切割后形成的长方体恰为成品长方体。每次切割使得待加工长方体一分为二,同时移去(舍弃)不含成品长方体的那一部分。

如果在每次切割之后都将原本应移去的那一部分保留在原处,则很容易就可以知道,切割的总面积总是等于待加工长方体的表面积

$2(ab + bc + ca)$, 总费用也总是一固定值(先考虑 $e = 0$ 的情况), 而不管 6 面的加工次

序如何。正是由于切割后移去了“无用”的部分，使得其后的切割面积和费用有可能比不移去的情况少，也使得切割总面积和总费用不再与加工次序无关。而当 $e \neq 0$ 时，切割费用还和垂直换刀的次数有关；这同样表明了切割费用与切割方式（加工次序）有关。我们的任务，就是找到一种方法来合理地安排各面的加工次序，使得总费用最小。

由于 6 个面的加工次序的排列是一有限数(720)，因此费用最小的切割方式（或称最优切割方式）是存在的。而且由于文中将说到的原因，费用最小的切割方式不一定是唯一的。

三、问题的假设

1. 待加工长方体的表面与成品长方体的表面不相接触，也即切割次数至少为 6；
2. 每次截断切割的切割平面均为成品长方体的某一表面所在的平面，这样保证了没有多余的切割。也即切割次数一定为 6；
3. 水平切割指的是垂直于长方体的高（见图 1）所做的切割；垂直切割指的是垂直于长方体的长或是宽所做的切割，其切割平面与长方体的高平行；
4. 我们认为加工部门有一种方法来固定加工过程中的长方体，而不需考虑切除长方体底面后的固定问题；
5. 由后面所给的定理一的推论可知，任一 $r \neq 1$ 的切割模型的求解，可以通过伸缩变换等价地转换为一个 $r = 1$ 的切割模型的求解。因此，除非另有说明，我们假定模型的 $r = 1$ ；
6. 在 $r = 1$ 的前提下，我们认为水平切割单位面积费用与垂直切割单位面积费用均为每平方米 1 元，同时认为费用单位为元、面积单位为平方米。这样，在文中将每次切割的面积与切割的费用（不包括换刀费用）等同对待。

另外，文中用“长方体”表示待加工长方体与正在加工过程中的长方体。

四、模型建立及符号说明

建模中所用的符号及一些术语说明如下：

a, b, c ：	待加工长方体的长、宽、高。
$a_1(a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ ：	待加工长方体和成品长方体两者的左侧面（右侧面、正面、背面、底面、顶面）之间的距离，也称为切去长度。
a_1 切割：	沿着成品长方体的左侧面所做的使得长方体的长减少 a_1 的切割。切割只表明切割的方位，而和长方体的切割历史无关。
a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 切割：	含义类同 a_1 切割。
$a(b, c)$ 类切割：	$a_1(b_1, c_1)$ 切割与 $a_2(b_2, c_2)$ 切割统称为 $a(b, c)$ 类切割。
同类切割，异类切割：	同属于 a 类切割或 b 类切割或 c 类切割的两种切割为同类切割，否则为异类切割。

$\Gamma = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$: Γ 表示一种切割方式, $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ 为 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 切割的一个排列, x_i 表示第 i 次切割。

$x_i = x'_j$: 表示 x_i 与 x'_j (在各自的模型中) 同为 a_1 (或 a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) 切割。

f_i : x_i 的切割费用 (不含换刀费用)。

$f(\Gamma, e)$: 切割方式 Γ 的加工费用, 当 $e=0$ 时简记为 $f(\Gamma)$ 。它是切割费用与换刀费用的总和。

l_i : x_i 的切去长度。

我们在文中还将不加说明地使用这些符号的一些变形 (如带撇、带下标等), 它们的含义通过上下文可以容易地确定。例如, 我们认为 $\Gamma' = x'_1x'_2x'_3x'_4x'_5x'_6$ 是记号 $\Gamma = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ 的带撇的变形, 且 l'_i 即为 x'_i 的切去长度。

切割模型为 $M = \{a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c, c_1, c_2, e, r\}$, 是一个 11 元的有序序列。模型的求解就是要针对 M 得到一个切割方式 $\Gamma_{\min}$, 使得 $f(\Gamma_{\min}, e) = \min_{\Gamma} f(\Gamma, e)$ 。

五、模型求解

1. 伸缩变换

水平切割与垂直切割在费用上有 r 倍的差别, 这是由实际的工艺决定的。但这样却使切割的模型复杂化了。其实, 有如下定理:

定理一: 设某一 $r \neq 1$ 的切割模型 $M = \{a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c, c_1, c_2, e, r\}$, 其任一切割方式为 $\Gamma = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$; M 经如下伸缩变换

$$\begin{aligned} a' &= a\sqrt{r}, & a'_1 &= a_1\sqrt{r}, & a'_2 &= a_2\sqrt{r} \\ b' &= b\sqrt{r}, & b'_1 &= b_1\sqrt{r}, & b'_2 &= b_2\sqrt{r} \\ c' &= c/\sqrt{r}, & c'_1 &= c_1/\sqrt{r}, & c'_2 &= c_2/\sqrt{r} \end{aligned} \quad (1)$$

后得到另一 $r'=1$ 的模型 $M' = \{a', a'_1, a'_2, b', b'_1, b'_2, c', c'_1, c'_2, e, r'=1\}$, Γ 在 M' 中的对应切割方式为 $\Gamma' = x'_1x'_2x'_3x'_4x'_5x'_6$, 则有 $f(\Gamma, e) = f(\Gamma', e)$ 。 Γ 与 Γ' 互为对应切割方式指的是 $x_i = x'_i, \forall i=1..6$ 。对应切割方式的存在性与唯一性十分显然。

证明: 先考虑第一次切割。由变换(1)及 x_1 与 x'_1 的对应性, 同时考虑到两个模型的 r 与 r' 不同, 则 x_1 的切割费用 f_1 与 x'_1 的费用 f'_1 有如下关系:

$$f'_1 = \begin{cases} b'c' = b\sqrt{r} \cdot c/\sqrt{r} = bc & (a\text{类切割}) \\ c'a' = c/\sqrt{r} \cdot a\sqrt{r} = ca & (b\text{类切割}) \\ r'a'b' = a\sqrt{r} \cdot b\sqrt{r} = rab & (c\text{类切割}) \end{cases} = f_1。$$

由于 Γ' 是 Γ 在模型 M' 中的对应切割方式, 由假设 2 可知模型 M 与 M' 在 x_1 与 x'_1 切割之后分别剩余的长方体的尺寸及成品长方体的位置, 仍满足(1)的比例关系, 因此以上的讨论适用于所有的六次切割, 也即有 $f'_i = f_i (i=1..6)$ 。另外, 显然 Γ 和 Γ' 两个解的垂直换刀次数是一样的, 可设为 k , 则有加工费用

$$f(\Gamma, e) = \sum_{i=1}^6 f_i + ke = \sum_{i=1}^6 f'_i + ke = f(\Gamma', e)。 \quad \square$$

推论：对任一 $r \neq 1$ 的切割模型 M ，存在一个 $r' = 1$ 的模型 M' ，使得 M' 的任一最优切割方式在 M 中的对应切割方式是 M 的最优切割方式；反过来， M 的任一最优切割方式在 M' 中的对应切割方式也是 M' 的最优切割方式。也即模型 M 的求解可转化为模型 M' 的求解。

证明：取 M' 为 M 经伸缩变换后所得的 $r' = 1$ 的模型。设 Γ' 是 M' 的任一最优切割方式，其在 M 中的对应切割方式为 Γ 。若 Γ 不是 M 的最优切割方式，则必存在 Γ_1 使得 $f(\Gamma_1, e) < f(\Gamma, e)$ ，从而由定理一， Γ_1 在 M' 中的对应切割方式 Γ'_1 满足 $f(\Gamma'_1, e) = f(\Gamma_1, e) < f(\Gamma, e) = f(\Gamma', e)$ 。这与假设 Γ' 是 M' 的最优切割方式矛盾。故 Γ 也是 M 的最优切割方式。同理可证反过来情形。 $\square$

由定理一的推论可知，对 $r \neq 1$ 的切割模型的求解，可以通过伸缩变换等价地转换为求解一 $r = 1$ 的切割模型。因此，除非另有说明，在以后的讨论中我们默认模型的 $r = 1$ 。

2. 不考虑刀具调整费用（ $e = 0$ ）

本节讨论当 $e = 0$ 时模型的求解。此时，切割方式 Γ 的加工费用为

$$f(\Gamma) = \sum_{i=1}^6 f_i。 \quad (2)$$

引理1（交换引理）：设切割方式 $\Gamma = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ ， Γ 经交换相邻的两次切割 x_i, x_{i+1} 后得到另一种切割方式 $\Gamma' = x'_1 x'_2 x'_3 x'_4 x'_5 x'_6 = x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} x_i x_{i+2} \dots x_6$ ，则有：(1) 若 x_i, x_{i+1} 为同类切割，则 $f(\Gamma) = f(\Gamma')$ ；(2) 若 x_i, x_{i+1} 为异类切割，则

$$\begin{aligned} l_i > l_{i+1} &\Leftrightarrow f(\Gamma) < f(\Gamma') \\ l_i = l_{i+1} &\Leftrightarrow f(\Gamma) = f(\Gamma')。 \\ l_i < l_{i+1} &\Leftrightarrow f(\Gamma) > f(\Gamma') \end{aligned}$$

证明：由费用计算公式(2)：

$$\begin{aligned} f(\Gamma) &= \sum_{k=1}^{i-1} f_k + f_i + f_{i+1} + \sum_{k=i+2}^6 f_k \\ f(\Gamma') &= \sum_{k=1}^{i-1} f'_k + f'_i + f'_{i+1} + \sum_{k=i+2}^6 f'_k \end{aligned}$$

显然，由 Γ' 的形式知当 $1 \leq k \leq i-1$ 时， $f_k = f'_k$ ；而且，因为 Γ 与 Γ' 的不同仅在于它们互换了第 $i, i+1$ 次切割的顺序，所以采用 Γ 的前 $i+1$ 次切割后得到的长方体与采用 Γ' 的前 $i+1$ 次切割后得到的长方体是相同的，又 $i+2 \leq k \leq 6$ 时 $x'_k = x_k$ ，所以 $i+2 \leq k \leq 6$ 时 $f'_k = f_k$ 。这样，

$$f(\Gamma) - f(\Gamma') = f_i + f_{i+1} - f'_i - f'_{i+1}。$$

第 $i-1$ 次切割后 Γ 得到的长方体的长、宽、高与 Γ' 得到的长方体的长、宽、高是相同的，设它们分别为 a', b', c' 。

若 x_i, x_{i+1} 为同类切割。不失一般性设其为 a_1, a_2 切割，则

$$f_i = b'c', f_{i+1} = b'c'; f'_i = b'c', f'_{i+1} = b'c'.$$

从而 $f(\Gamma) = f(\Gamma')$ 。

若 x_i, x_{i+1} 为异类切割。不失一般性设其为 a_1, b_1 切割，则

$$l_i = a_1, l_{i+1} = b_1, \\ f_i = b'c', f_{i+1} = (a' - a_1)c'; f'_i = a'c', f'_{i+1} = (b' - b_1)c'.$$

从而

$$f(\Gamma) - f(\Gamma') = b'c' + (a' - a_1)c' - a'c' - (b' - b_1)c' \\ = (b_1 - a_1)c'$$

考虑到 $c' > 0$ ，则有

$$a_1 > b_1 \Leftrightarrow f(\Gamma) < f(\Gamma')$$

$$a_1 = b_1 \Leftrightarrow f(\Gamma) = f(\Gamma').$$

$$a_1 < b_1 \Leftrightarrow f(\Gamma) > f(\Gamma')$$

由 x_i, x_{i+1} 的一般性，我们可得所求结论：

$$l_i > l_{i+1} \Leftrightarrow f(\Gamma) < f(\Gamma')$$

$$l_i = l_{i+1} \Leftrightarrow f(\Gamma) = f(\Gamma').$$

$$l_i < l_{i+1} \Leftrightarrow f(\Gamma) > f(\Gamma')$$

□

定义 正规切割方式：若切割方式 $\Gamma = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ 满足当 x_i, x_{i+1} 为同类切割时 $l_i \geq l_{i+1}, \forall i = 1..5$ ，则称 Γ 为正规切割方式。

定义 等价正规切割方式：根据引理1（交换引理），交换任一切割方式 Γ 中相邻的同类切割，加工费用不变，所以我们可以把 Γ 化为加工费用相同的正规切割方式 Γ' 。 Γ' 即称为 Γ 的等价正规切割方式。

定义 有序切割方式：若切割方式 Γ 满足 $l_i \geq l_{i+1}, \forall i = 1..5$ ，则称 Γ 为有序切割方式。有序切割方式一定是正规切割方式。

引理2（最少费用引理）：若正规切割方式 $\Gamma = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ 不是有序切割方式，则 Γ 不是费用最少的。

证明： Γ 是正规切割方式，但不是有序切割方式，因此 $\exists i$ ，使得 $l_i < l_{i+1}$ 且 x_i, x_{i+1} 为异类切割，再由交换引理知存在加工费用更少的切割方式。 □

引理3（有序切割引理）：若切割方式 Γ 和 Γ' 均为模型 M 的有序切割方式，则 $f(\Gamma) = f(\Gamma')$ 。

证明：首先，易知 $l_i = l'_i, \forall i = 1..6$ 。若 $x_i = x'_i, \forall i = 1..6$ ，则结论显然成立。

否则，设 k 为使 $x_i \neq x'_i$ 成立的最小的 i ，即

$$x_1 = x'_1, \dots, x_{k-1} = x'_{k-1}, x_k \neq x'_k.$$

设 j 使 $x'_j = x_k$ ，由于当 $j < k$ 时 $x'_j = x_j \neq x_k$ ， $j = k$ 时 $x'_j = x'_k \neq x_k$ ，故 $j > k$ 。这时 $l'_j = l_k = l'_k$ 。则由 Γ' 是有序切割方式可知 $l'_k = l'_{k+1} = \dots = l'_j$ 。

现对 Γ' 进行一系列相邻交换，使 x'_j 在 Γ' 中的位置逐次前移，直到其与 x'_k 交换，这样得到一个新的有序切割方式 Γ'' ：

$$\Gamma'' = x'_1 \dots x_{k-1} x'_j x'_k \dots x'_{j-1} x'_{j+1} \dots x_6 = x_1 \dots x_{k-1} x_k x'_k \dots x'_{j-1} x'_{j+1} \dots x'_6,$$

由引理1, $f(\Gamma'') = f(\Gamma')$, 但 Γ'' 与 Γ 在序列前部连续相同的切割的数目至少比 Γ' 与 Γ 相同的数目 (即 k) 大。以 Γ'' 代替 Γ' 重复上述过程, 则经过不超过 6 次这样的过程, 必可得到 $\Gamma''' = \Gamma$, 所以

$$f(\Gamma') = f(\Gamma''') = f(\Gamma)。 \quad \square$$

定理二: 切割方式 $\Gamma = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ 为最少费用切割方式 $\Leftrightarrow$ 其等价正规切割方式 $\Gamma' = x'_1 x'_2 x'_3 x'_4 x'_5 x'_6$ 为有序切割方式。

证明:

(1) 充分性($\Leftarrow$)的证明: 采用反证法。

反设 Γ 不是最少费用切割方式, 即存在 $\Gamma'' = x''_1 x''_2 x''_3 x''_4 x''_5 x''_6$, 其加工费用最少, 且 $f(\Gamma'') < f(\Gamma)$ 。不妨设 Γ'' 为正规切割方式 (否则可考虑 Γ'' 的等价正规切割方式)。

若 Γ'' 是有序切割方式, 由引理3, $f(\Gamma'') = f(\Gamma')$, 与反设 $f(\Gamma'') < f(\Gamma)$ 及 $f(\Gamma) = f(\Gamma')$ (等价正规切割方式的定义) 矛盾。若 Γ'' 不是有序切割方式, 则由引理2知 Γ'' 的加工费用不是最少的, 亦矛盾。

由此知 Γ 是最少费用切割方式

(2) 必要性($\Rightarrow$)的证明: 即为引理2的逆否命题。 $\square$

由定理二可知有序切割序列是最优切割序列, 因此在实际的切割操作中, 只需考虑有序切割序列这一种最简单的情形即可。这也就是我们所给出的优化准则, 即每次挑选使得切去长度最长的切割面来切割。这样得到的切割序列必定是有序切割序列, 从而也就必是最优切割序列。

3. 考虑刀具调整费用 ($e > 0$)

A. 加工费用曲线

对于切割方式 Γ , 设它的换刀次数为 k , ($1 \leq k \leq 3$), 则有加工费用

$$f(\Gamma, e) = ke + f(\Gamma)。 \quad (3)$$

从式(3)中可以看出, 如果能够得到切割方式 Γ 在 $e = 0$ 时的加工费用 $f(\Gamma)$, 则根据 Γ 的垂直换刀次数 k 就可以计算出任意 e 值下的加工费用。根据式(3)能画出 $f \sim e$ 加工费用曲线, 如图 2(a), 它是一条斜率为 k , 纵轴截距为 $f(\Gamma)$ 的射线。给定 e 值, 即可由曲

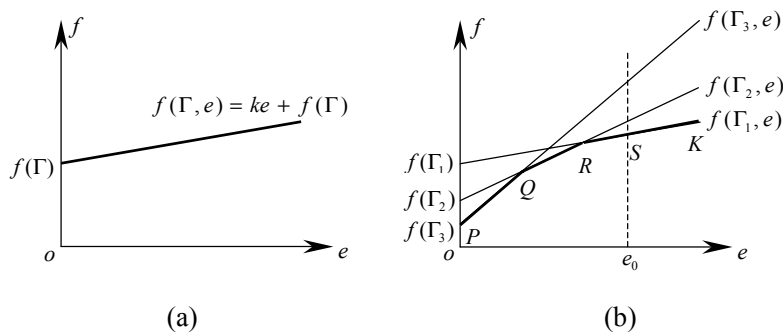


图2 加工费用曲线

线上的相应点的纵坐标得到该 e 值下的加工费用。

根据上面的讨论，我们可以想象，若是在同一坐标系中画出模型 M 的所有切割方式的费用曲线，则对于任意的 e 值，从图中就能找到该 e 值下所有曲线的最低点，即为图 2(b) 中的点 S ， S 的纵坐标即为该 e 值下的最小费用，而 S 所在的曲线即代表了相应的最优切割方式。

考虑到换刀次数 k 相同的所有切割方式的费用曲线是一组平行射线，因而在寻求最优解时只需考虑它们中纵轴截距 $f(\Gamma)$ 最小的那条射线。如果记 Γ_k 为那条射线所对应的切割方式，则我们在求最优解时就只需考虑切割方式 Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 ，而在图上就只需考虑 Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 对应的三条射线。而不同 e 值下的最小费用 $f_{\min}(e)$ 即为：

$$f_{\min}(e) = \min[f(\Gamma_1, e), f(\Gamma_2, e), f(\Gamma_3, e)],$$

反映在图形上，即为由三条 $f \sim e$ 曲线 $f(\Gamma_1, e)$ 、 $f(\Gamma_2, e)$ 、 $f(\Gamma_3, e)$ 的最靠近 e 轴的片断所形成的“包络线”，称为最小费用曲线，其典型形状见图 2(b) 中的折线 $PQQRK$ 。而三个截距 $f(\Gamma_1)$ 、 $f(\Gamma_2)$ 、 $f(\Gamma_3)$ 的相对位置则决定了最小费用曲线是否有突变点（转折点），及突变点的个数。从图中可以形象地看出，随着 e 的增大，最优解逐渐经过每个突变点（在突变点存在的情况下）；在两个突变点之间，最优解是固定的，最小费用曲线的斜率也是固定的；而每经过一个突变点，最小费用曲线的斜率减小，最优解也发生改变。突变点处的最优解，则包括了其左右两侧曲线对应的切割方式。

B. $e > 0$ 时的求最优解的考虑范围

对于同类切割的相互位置对加工费用的影响，我们有如下引理：

引理4： 在切割方式 $\Gamma = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ 中，若 x_i, x_j 为同类切割，且 $l_i \leq l_j, i < j$ ，则对于 $\Gamma' = x'_1 x'_2 x'_3 x'_4 x'_5 x'_6 = x_1 \dots x_{i-1} x_j x_{i+1} \dots x_{j-1} x_i x_{j+1} \dots x_6$ ，有 $f(\Gamma) \geq f(\Gamma')$ 。

证明： 不失一般性设 x_i, x_j 为 a 类切割。首先 Γ, Γ' 中换刀次数相同，所以可以不考虑换刀费用的影响。下面我们通过比较两者每次切割的费用来给出证明。

前 $i-1$ 次切割中，每次切割后 Γ, Γ' 得到的长方体相同，所以当 $1 \leq k \leq i-1$ 时， $f_k = f'_k$ 。又 Γ, Γ' 的第 i 次切割为同类切割，所以 $f_i = f'_i$ 。

第 i 次切割后， Γ, Γ' 得到的长方体的长分别为 $a-l_i, a-l_j$ ，而宽和高分别相同。从第 $i+1$ 次到第 $j-1$ 次的切割，均不是 a 类切割，所以每次切割后 Γ, Γ' 得到的长方体长仍分别为 $a-l_i, a-l_j$ ，而宽和高分别相同。所以当 $i+1 \leq k \leq j-1$ 时， $f_k : f'_k = (a-l_i) : (a-l_j)$ ，即 $f_k \geq f'_k$ 。

第 j 次切割时， Γ, Γ' 的长方体的宽和高分别相同，所以 $f_j = f'_j$ 。

第 j 次切割后， Γ, Γ' 得到的长方体相同。从第 $j+1$ 次到第 6 次的切割，每次切割时 Γ, Γ' 的长方体相同，所以当 $j+1 \leq k \leq 6$ 时， $f_k = f'_k$ 。

综上，可知 $f(\Gamma) \geq f(\Gamma')$ 。由 x_i, x_j 的一般性，可知命题成立。□

利用以上引理，我们下面将讨论在 $e > 0$ 时寻求最优解所需考虑的切割方式的范围。

换刀次数 k 与水平切割 c_1, c_2 无关，仅与垂直的 a_1, a_2, b_1, b_2 切割的顺序有关。不妨设 $a_1 \geq a_2$ 、 $b_1 \geq b_2$ 、 $c_1 \geq c_2$ ，对 $\Gamma = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ ，为了尽量减少加工费用，由引理 4， a_1 切割在 Γ 中的位置应在 a_2 切割之前， b_1 切割应在 b_2 切割之前， c_1 切割应在 c_2 切割之前。因此只需考虑这样的切割方式 Γ ，其中 a_1, a_2, b_1, b_2 切割的排列为下列六种之一：

$$\begin{cases} a_1 a_2 b_1 b_2, & b_1 b_2 a_1 a_2; & (k=1) \\ a_1 b_1 b_2 a_2, & b_1 a_1 a_2 b_2; & (k=2) \\ a_1 b_1 a_2 b_2, & b_1 a_1 b_2 a_2; & (k=3) \end{cases}$$

当 a_1, a_2, b_1, b_2 的排列确定之后，则可将 c_1, c_2 插入到排列中去，同时保持 c_1 在前、 c_2 在后的顺序，这样就可以得到完整的切割方式 Γ 。例如把 c_1, c_2 插入 $a_1 a_2 b_1 b_2$ ，可以为 $a_1 c_1 c_2 a_2 b_1 b_2$ ，或 $a_1 c_1 a_2 b_1 c_2 b_2$ ，等等，可得到 $C_5^2 + C_5^1 = 15$ 种切割方式。同样，把 c_1, c_2 插入 $b_1 b_2 a_1 a_2$ 也可得 15 种切割方式，所以对 $k=1$ 共有 30 种切割方式需要考虑。同样，对于 $k=2, 3$ ，亦各有 30 种切割方式需要考虑。所以，一般说来，我们要考虑 90 种切割方式方能确定最优解。

下面我们着重分析如何把要考虑的范围尽可能缩小。在确定 a_1, a_2, b_1, b_2 的排列后，我们将它分成几个连续子序列的连接，使得每一子序列中的切割长度是依次（非严格）递减的，而任意相邻两个子序列的连接却不能满足连续递减的条件。我们称这样的每一个子序列为“坡”。由于在每一个坡内，切割长度的排列是有序的，由引理 1 可知，只有在 c_i 插入某个坡后形成的子序列仍保持有序性的情况下，才可能使加工费用最少。所以在 c_i 插入某个坡时，我们只需考虑使插入后形成的子序列仍保持有序性的一种插法。对于一个有 n 个坡的 a_1, a_2, b_1, b_2 的排列，若是将 c_1, c_2 均插入到同一个坡中，则有 n 种方法；而将 c_1, c_2 分别插入到不同的坡中，则有 C_n^2 种方法。故总共有 $n + C_n^2 = C_{n+1}^2$ 种方法。一般说来，这样所确定的考虑范围已大大小于原先所说的 30 种的范围。下面我们具体地来看看此时需考虑范围的大小。

$k=1$ 时，需要把 c_1, c_2 插入 $a_1 a_2 b_1 b_2$ 、 $b_1 b_2 a_1 a_2$ 。

若 $a_2 \geq b_1$ ，则 $a_1 a_2 b_1 b_2$ 中， $a_1 \geq a_2 \geq b_1 \geq b_2$ ，只存在一个坡，把 c_1, c_2 插入 $a_1 a_2 b_1 b_2$ ，只有 1 种方法；而 $b_1 b_2 a_1 a_2$ 中，因为 $b_2 \leq b_1 \leq a_2 \leq a_1$ ，所以存在两个坡 $b_1 b_2$ 、 $a_1 a_2$ ，把 c_1, c_2 插入 $b_1 b_2 a_1 a_2$ ，共有 $C_3^2 = 3$ 种方法。事实上，把 c_1, c_2 插入 $a_1 a_2 b_1 b_2$ 的那种方法已经是有序切割方式，即已为最优解，所以把 c_1, c_2 插入 $b_1 b_2 a_1 a_2$ 的 3 种方法其实不用考虑。因此，共只需考虑 1 种切割方式。

若 $a_2 < b_1$ ，则 $a_1 a_2 b_1 b_2$ 中， $a_1 \geq a_2, a_2 < b_1, b_1 \geq b_2$ ，有两个坡 $a_1 a_2$ 、 $b_1 b_2$ 。把 c_1, c_2 插入 $a_1 a_2 b_1 b_2$ ，共有 $C_3^2 = 3$ 种方法；而 $b_1 b_2 a_1 a_2$ 中，当 $b_2 \geq a_1$ 时有一个坡，对应 1 种方法，当 $b_2 < a_1$ 时有两个坡，对应 3 种方法。所以 $a_2 < b_1$ 时共需考虑 4 种或 6 种切割方式。

这样，我们把 $k=1$ 时的考虑范围由 30 种缩小为 1 种或 4 种或 6 种。

用同样的方法， $k=2$ 时，考虑范围由 30 种缩小为 1 种或 6 种。 $k=3$ 时，考虑范围由 30 种缩小为 1 种或 6 种。因此，这样总的考虑范围就不超过 $6+6+6=18$ 种。

综上，引入坡的概念后，用我们的方法，极大地缩小了考虑范围，用手工计算也

能很快求得最优解。

4. 具体问题求解

下面用题目中所给的实例来验证我们的方法。实例中的数据在我们的模型中体现为： $a_1 = 6, a_2 = 1, b_1 = 7, b_2 = 5.5, c_1 = 9, c_2 = 6$ 。

按照定理二，我们可以求出 a 题、b 题、c 题这三种 $e = 0$ 情况下的最优解：

题号	题目条件	费用最少的切割方式 Γ	最少切割费用 $f(\Gamma)$
a	$r = 1, e = 0$	$c_1 b_1 a_1 c_2 b_2 a_2$ $c_1 b_1 c_2 a_1 b_2 a_2$	374
b	$r = 1.5, e = 0$	$b_1 a_1 c_1 b_2 c_2 a_2$ $b_1 c_1 a_1 b_2 c_2 a_2$	437.5
c	$r = 8, e = 0$	$b_1 a_1 b_2 c_1 a_2 c_2$	540.5

再来看 d 题，条件为 $r = 1.5, 2 \leq e \leq 15$ ，是属于 $e > 0$ 的情况。按照我们对 $e > 0$ 的情况的讨论来求解此题，过程如下：

(1) $e = 0$ 时，用“坡”的概念可以求出

$$\Gamma_1 = b_1 c_1 b_2 a_1 c_2 a_2, f(\Gamma_1) = 442.5;$$

$$\Gamma_2 = a_1 b_1 c_1 b_2 c_2 a_2, f(\Gamma_2) = 456.5;$$

$$\Gamma_3 = b_1 a_1 c_1 b_2 c_2 a_2 \text{ 或 } b_1 c_1 a_1 b_2 c_2 a_2, f(\Gamma_3) = 437.5$$

(2) 画出三条 $f \sim e$ 曲线（如图 3），可以得到突变点为 $e = 2.5$ ，进一步有如下结果：

e 的取值	费用最少的切割方式
$2 \leq e < 2.5$	$b_1 a_1 c_1 b_2 c_2 a_2$ $b_1 c_1 a_1 b_2 c_2 a_2$
$e = 2.5$	$b_1 a_1 c_1 b_2 c_2 a_2$ $b_1 c_1 a_1 b_2 c_2 a_2$ $b_1 c_1 b_2 a_1 c_2 a_2$
$2.5 < e \leq 15$	$b_1 c_1 b_2 a_1 c_2 a_2$

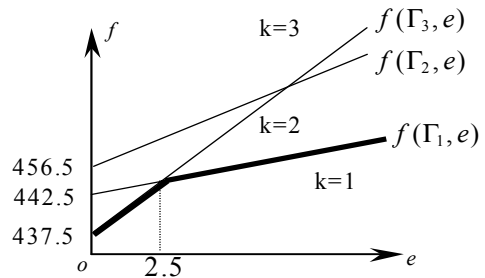


图3

六、模型评价（及改进）

在我们的模型中，首先，我们通过简单的伸缩变换，把 $r \neq 1$ 的情况化为 $r = 1$ 的情况，使得 $r \neq 1$ 的情况和 $r = 1$ 的情况可以统一处理。然后，我们对 $e = 0$ 的情况进行了深入讨论，得到了一个经严格证明的极其简明的最优化准则，即每次选择使得切去长度最长的切割面来切割，或简单地说，“长者优先”。在此基础上，我们对 $e > 0$ 的情况给出了一种需考虑范围较少的解法。我们首先从图形上直观地解释了当 e 增大时，最优的切割方式可能存在突变，同时指出只需考虑在 $e = 0$ 时三种换刀次数下各自的最优解（及其加工费用），即可找到 e 为任意值时的最优解。最后我们给出了一个把考虑范围从 90 种切割方式缩小为不超过 18 种的方法。在附录中我们还给出了切割的“贡献”

这一概念，并且利用这种概念的深刻的物理内涵，证明了全文的基础，即交换引理。

总的来说，我们的模型准确地描述了截断切割问题，而我们所引入的若干概念及定理，使得模型的求解既严密又优美，同时得到了极好的结果。但其对于 $e > 0$ 的情况没有得到简明的准则，只是把考虑范围缩小为不大于 18 种。相对于原先的 720 种或是 90 种，18 种已是一种手工操作可以接收的数，但有时仍显略多。

顺便指出，

- (1) 题目中的 2) 所提出的“每次选择加工费用最少的待切面切割”的切割准则是没有道理的。完全可以设计一种例子，使得即使在 $e = 0$ 的条件下用这种准则求得的切割方式的费用是最多的。如一种例子为

$$a = 10, b = 7, c = 4; a_1 = 1, a_2 = 1.5; b_1 = 1.6, b_2 = 1.7; c_1 = 1.8, c_2 = 1.9,$$

而 $r = 1, e = 0$ 。用该准则得到的切割方式的费用为 171.5，恰为切割费用的最大值。

- (2) 本题没有必要用计算机搜索所有切割方式来求解。但如果实际的切割车间有计算机，则简单的穷举法即可胜任求最优解的任务。

我们的模型很容易推广到成品长方体与待加工长方体有重合面的情况。它也容易推广到水平切割与垂直切割之间需要额外换刀费用的更复杂情形。

七、附录

在附录中，我们将把问题分析里所提出的“不移走的切割方法”进一步细致化，并利用其引出“贡献”的概念；随后，我们讨论了“贡献”的性质，并从此出发给出了 $e = 0$ 条件下的引理 1 的另一种证明。附录中的讨论，即基于 $e = 0$ 。

1. “贡献”的概念

在实际的切割过程中，每切一刀，就会有一部分切下并被移走，以后的各次切割都不再会切到这个部分，这可称为正常切割。但如果在切去一刀后并不移走被切下的那个部分，使它还留在原处，那么以后的各次切割均还会切到这个部分，切割面积显然比正常切割时的要大，费用也高。这可称为“切割不移走”的方式。由此可见，正常切割时将切下部分移走这一特点，对于减少以后切割的切割面积是有益的。在这里，“贡献”的概念被用来描述正常切割的这种作用。

如图 4 所示，设 $1 \leq i < j \leq 6$ ，到 x_i 之前，由正常切割所形成的长方体为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 。不妨设 x_i 为 a 类切割， x_j 为 c 类切割。（两次切割为同类切割的情况在下面的性质 1 中讨论。） x_i 的截面为 $EFGH$ ，切下部分为长方体 $EBCH - FB_1C_1G$ 。若我们假设不移走这个切下的长方体，且 x_i 之后的各

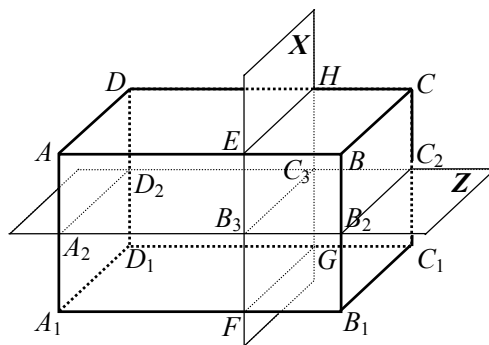


图4 切割过程示意

次切割也均采用“切割不移走”的方式，那么到 x_j 之前， $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 虽已四分五裂，但还保持原有的形状及位置， x_j 的切割截面就是矩形 $A_2B_2C_2D_2$ 。但实际上 x_i 应是正常切割，长方体 $EBCH-FB_1C_1G$ 在切下后也应立即被移走。为了单独讨论 x_i 的作用，我们假设其后的各次切割仍采用“切割不移走”方式，那么这时的切割 x_j 面对的应是长方体 $AEHD-A_1FGD_1$ ，切割截面为 $A_2B_3C_3D_2$ ，比不移走 $EBCH-FB_1C_1G$ 时的切割截面少了矩形 $B_3B_2C_2C_3$ 。矩形 $B_3B_2C_2C_3$ 的面积即被定义为 x_i 对 x_j 的“贡献”，用 $D_{i,j}$ 表示。

2. “贡献”的性质

如果将前 i 次切割采用正常切割而其后的 $(6-i)$ 次切割采用“切割不移走”方式所得到的切割总面积记为 D_i ，则由问题分析中的讨论，有

$$D_0 = 2ab + 2bc + 2ca。$$

而从“贡献”的定义可知，从 D_0 去除第1次切割对后5次切割产生的贡献就得到 D_1 。

即 $D_1 = D_0 - \sum_{j=2}^6 D_{1,j}$ 。同理，有 $D_i = D_{i-1} - \sum_{j=i+1}^6 D_{i,j}$ ， $i=1..5$ 。而加工费用

$$f = D_6 = D_5 = D_0 - \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 D_{i,j}。 \quad (4)$$

可见，“贡献”总和 $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 D_{i,j}$ 越大，加工费用 f 越小，方案越好。因此，模型求解目标转化为求切割序列使 $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 D_{i,j}$ 最小。

下面我们给出 $D_{i,j}$ ($i < j$)的两个性质。

性质1：如果 x_i 与 x_j 是同类切割，则 $D_{i,j} = 0$ 。

证明：不妨设 x_i 与 x_j 都为 a 类切割，则 x_i 只改变长方体的长。而 x_j 的切割面积仅与长方体的宽和高有关，所以 x_i 对 x_j 的切割面积没有影响，即 $D_{i,j} = 0$ 。□

性质2：如果 x_i 与 x_j 是异类切割，则 $D_{i,j} = l_i \times t(i)$ 。其中 $t(i)$ 为长方体在第 i 次切割时在与 x_i 、 x_j 的切割方向相异的第三种切割方向上的长度。

证明：不妨仍以图4为例。在 $D_{i,j}$ 的定义中已指出

$$D_{i,j} = S_{B_3B_2C_2C_3} = |B_3B_2| \times |BC|。$$

显然 $|B_3B_2|$ 就是 x_i 的切去长度 l_i 。 x_i 为 a 类切割， x_j 为 c 类切割，那么与 x_i 、 x_j 的切割方向相异的第三种切割方向应为 b 类切割的切割方向。而 $|BC|$ 就是第 i 次切割时该方向上长方体的长度，即 $t(i) = |BC|$ 。由此可知， $D_{i,j} = l_i \times t(i)$ 。□

引理1’：设切割方式 $\Gamma = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ ，如果存在 k ($1 \leq k \leq 5$)使得 $l_k < l_{k+1}$ ，交换这两次切割后所得的另一切割方式为 $\Gamma' = x_1 \dots x_{k-1}x_{k+1}x_kx_{k+2} \dots x_6$ ，则

$$f(\Gamma) \geq f(\Gamma')。$$

证明：由“贡献”的定义及式(4)知，要证 $f(\Gamma) \geq f(\Gamma')$ ，只需证

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 D_{i,j} \leq \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 D'_{i,j}。$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 D_{i,j} &= \sum_{i \neq k, k+1} \sum_{j=i+1}^6 D_{i,j} + D_{k,k+1} + \sum_{j=k+2}^6 (D_{k,j} + D_{k+1,j}) \\ \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 D'_{i,j} &= \sum_{i \neq k, k+1} \sum_{j=i+1}^6 D'_{i,j} + D'_{k,k+1} + \sum_{j=k+2}^6 (D'_{k,j} + D'_{k+1,j}) \end{aligned} \quad (5)$$

由性质1、2可知， $D_{i,j}$ 为 0 或仅与第 i 次切割时具体情况（指 l_i 与 $t(i)$ ）有关，交换 x_k 与 x_{k+1} 对其余四次切割的具体情况并不影响。所以

$$D_{i,j} = D'_{i,j} \quad (i \neq k, k+1, \quad j > i),$$

$$\sum_{i \neq k, k+1} \sum_{j=i+1}^6 D_{i,j} = \sum_{i \neq k, k+1} \sum_{j=i+1}^6 D'_{i,j}。$$

故下面仅需证明 $D_{k,k+1} + \sum_{j=k+2}^6 (D_{k,j} + D_{k+1,j}) \leq D'_{k,k+1} + \sum_{j=k+2}^6 (D'_{k,j} + D'_{k+1,j})$ 。

(1) x_k 与 x_{k+1} 为同类切割。由性质1知， $D_{k,k+1} = D'_{k,k+1} = 0$ 。另外，由于同类切割只有两次， x_k 与 x_{k+1} 已占两次，故 x_j 与 x_k 、 x_j 与 x_{k+1} 均为异类切割，所以有：

$$\begin{aligned} D_{k,j} + D_{k+1,j} &= l_k \times t(k) + l_{k+1} \times t(k+1) \\ D'_{k,j} + D'_{k+1,j} &= l'_k \times t'(k) + l'_{k+1} \times t'(k+1) \end{aligned}$$

而长方体在与 x_k 和 x_j 切割方向均不同的第三种切割方向的长度在 x_k 与 x_{k+1} 切割时均不改变，且与交换无关，所以 $t(k) = t(k+1) = t'(k) = t'(k+1)$ ；交换意味着 $l'_{k+1} = l_k$ ， $l'_k = l_{k+1}$ ，所以

$$D_{k,j} + D_{k+1,j} = D'_{k,j} + D'_{k+1,j}, (k+1 < j \leq 6),$$

$$D_{k,k+1} + \sum_{j=k+2}^6 (D_{k,j} + D_{k+1,j}) = D'_{k,k+1} + \sum_{j=k+2}^6 (D'_{k,j} + D'_{k+1,j})。$$

(2) x_k 与 x_{k+1} 为异类切割。不妨设 x_k 、 x_{k+1} 分别为 a 类切割、 b 类切割，用 $t_z(k)$ 表示第 k 次切割时长方体的高度，有

$$D_{k,k+1} = l_k \cdot t_z(k); D'_{k,k+1} = l'_k \cdot t'_z(k)。$$

由于 x_k 与 x_{k+1} 不影响长方体的高度，则 $t'_z(k) = t_z(k)$ ；又 $l'_k = l_{k+1}$ ，所以

$$D'_{k,k+1} = l_{k+1} \cdot t_z(k)。$$

下面考虑 $(D_{k,j} + D_{k+1,j})$ 和 $(D'_{k,j} + D'_{k+1,j})$ 。

(I) 若 x_j 为 a 类切割，则

$$D_{k,j} = D'_{k+1,j} = 0, \quad D_{k+1,j} = l_{k+1} \cdot t_z(k+1), \quad D'_{k,j} = l'_k \cdot t'_z(k)$$

与同类切割中的讨论类似，我们有 $l'_k = l_{k+1}$ ， $t'_z(k) = t_z(k+1)$ ，所以

$$D_{k+1,j} = D'_{k,j}, \quad \text{进而有 } D_{k,j} + D_{k+1,j} = D'_{k,j} + D'_{k+1,j}。$$

(II) 若 x_j 为 b 类切割, 同理可证。

(III) 若 x_j 为 c 类切割, 则用 $t_x(k)$ 与 $t_y(k)$ 分别表示第 k 次切割时长方体的长度与宽度, 我们可得到

$$\begin{aligned} D_{k,j} &= l_k \cdot t_y(k), \quad D_{k+1,j} = l_{k+1} \cdot t_x(k+1), \\ D'_{k,j} &= l'_k \cdot t'_x(k), \quad D'_{k+1,j} = l'_{k+1} \cdot t'_y(k+1). \end{aligned}$$

而由切割的过程可知, $l'_{k+1} = l_k$, $l'_k = l_{k+1}$, 且

$$t'_y(k+1) = t_y(k) - l'_k = t_y(k) - l_{k+1}, \quad t'_x(k) = t_x(k+1) + l_k,$$

这样就有

$$\begin{aligned} D'_{k,j} + D'_{k+1,j} &= l'_k \cdot t'_x(k) + l'_{k+1} \cdot t'_y(k+1) \\ &= l_{k+1} [t_x(k+1) + l_k] + l_k [t_y(k) - l_{k+1}] \\ &= l_k \cdot t_y(k) + l_{k+1} \cdot t_x(k+1) \\ &= D_{k,j} + D_{k+1,j} \end{aligned}$$

所以, 不论 x_j 为何种切割, $D_{k,j} + D_{k+1,j} = D'_{k,j} + D'_{k+1,j}$ 总是成立的。

那么

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 D'_{i,j} - \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 D_{i,j} &= D'_{k,k+1} - D_{k,k+1} = l_{k+1} \cdot t_z(k) - l_k \cdot t_z(k) \\ &= (l_{k+1} - l_k) \cdot t_z(k) \end{aligned}$$

考虑到 $t_z(k) > 0$, $l_{k+1} > l_k$, 所以

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 D'_{i,j} > \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 D_{i,j}$$

综上所述, 若 $l_{k+1} > l_k$, 则 $f(\Gamma) \geq f(\Gamma')$, 引理得证。 □